RdP 1 — Sonderübung 3 — WS 08/09

① Die Gleichung $\vec{r}\cdot\hat{H}\vec{r} = 8xy + 6y^2 = 2$ beschreibt ein geometrisches Objekt in der xy-Ebene. Matrix $H = ?$ Deren Eigenwerte? Zugehörige Eigenvektoren $\vec{f}_1, \vec{f}_2$? Zusammen mit $\vec{f}_3 \doteq (0,0,1)$ soll ein normiertes Rechtssystem entstehen. Drehmatrix D? Gleichung des Objekts im $\vec{f}$-System? Skizze des Objekts?

② Welcher Bewegungsgleichung folgt eine Masse m im Potenzial $V = m\omega^2\,\vec{r}\cdot\hat{H}\vec{r}$ mit $H = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$?
In welche zwei Gleichungen zerfällt sie im Hauptachsensystem? Wenn man m auf a) der ersten b) der zweiten Hauptachse im Abstand a vom Ursprung festhält und dann plötzlich losläßt, wie bewegt sie sich dann weiter (d.h. $x'(t)$ und $y'(t)$)? Man ermittle auch die zugehörige Drehmatrix D und den Drehwinkel φ.

③ Zur Zeit $t=0$ durchläuft ein Teilchen (m) den Punkt $\vec{r}(0) \doteq \frac{R}{3}(2,2,1)$ mit Geschwindigkeit $\mathring{\vec{r}}(0) \doteq \frac{R\omega}{3}(2,-1,-2)$. Es ist anisotrop an den Ursprung gebunden: $\vec{F} = -m\omega^2\,\hat{A}\,\vec{r}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
Führen Sie die Hauptachsentransformation zu A durch, ermitteln Sie dann $\underline{r}'(0)$ und $\mathring{\underline{r}}'(0)$, stellen Sie die Bewegungsgleichung für $\underline{r}'(t)$ auf und lösen Sie sie! Nach Skizze der Bahnkurve in der $x'y'$-Ebene finden Sie $\vec{r}(t)$ mit Hilfe der Rücktransformation.
[Zwischenresultate: $\underline{f}_1 \sim (2,2,1)$, $\underline{f}_2 \sim (2,-1,-2)$, $z'(t) \equiv 0$.]

④ In einem anisotropen Medium sind die Komponenten des Stromdichtevektors $\vec{j}$ bei angelegtem elektrischen Feld $\vec{E}$:
$j_1 = \sigma_0(4E_1 - E_2 - E_3)$, $j_2 = \sigma_0(-E_1 + 2E_2 + E_3)$, $j_3 = \sigma_0(-E_1 + E_2 + 2E_3)$.
Geben Sie den Leitfähigkeitstensor $\hat{\sigma}$ in $\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E} = \sigma_0\hat{H}\vec{E}$ in Matrixform an. Berechnen Sie die Eigenwerte σ_i in $j_i' = \sigma_i E_i'$. In welcher Richtung $\vec{a}$ misst man die Leitfähigkeit $\sigma_i = 2\sigma_0$?